# Attention à anticiper les colles du 11 novembre

### Première semaine.

## Suites de fonctions:

Les fonctions sont définies sur une partie A d'un espace vectoriel E de dimension finie et à valeurs dans un espace vectoriel normé F de dimension finie. Dans la pratique, on se limite pour l'essentiel au cas de fonctions à valeurs dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Convergence simple, convergence uniforme

Convergence simple sur A.

Convergence uniforme sur A. La convergence uniforme entraı̂ne la convergence simple. Pour des fonctions bornées, interprétation de la convergence uniforme sur A en termes de norme.

Continuité, double limite

Si les  $u_n$  sont continues en a et si  $(u_n)$  converge uniformément vers u sur un voisinage de a, alors u est continue en a. Toute limite uniforme de fonctions continues sur A est continue sur A. Adaptation au cas où la convergence est uniforme au voisinage de tout point de A.

Théorème de la double limite : soit  $(u_n)$  une suite de fonctions de A dans F convergeant uniformément vers u sur A, et soit a un point adhérent à A; si, pour tout n,  $u_n$  admet une limite  $\ell_n$  en a, alors  $(\ell_n)$  admet une limite  $\ell$  et

$$u(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell.$$

Démonstration non exigible.

Adaptation, si  $A \subset \mathbb{R}$ , aux cas où  $a = +\infty$  et  $a = -\infty$ .

Intégration d'une limite uniforme sur un segment

Soit  $(u_n)$  une suite de fonctions continues définies sur l'intervalle I de  $\mathbb{R}$  et à valeurs dans F, a un point de I. On suppose que  $(u_n)$  converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction u. Pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \in I$  soit

$$U_n(x) = \int_a^x u_n, \quad U(x) = \int_a^x u.$$

Alors  $(U_n)$  converge uniformément vers U sur tout segment de I. En particulier, si  $(u_n)$  converge uniformément vers u sur le segment S, alors :

$$\int_{S} u_n \to \int_{S} u.$$

Dérivation d'une suite de fonctions

Soit  $(u_n)$  une suite de fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un intervalle I de  $\mathbb{R}$ , à valeurs dans F. Si  $(u_n)$  converge simplement sur I vers une fonction u, et si  $(u'_n)$  converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction v, alors  $(u_n)$  converge uniformément vers u sur tout segment de I, u est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur I et u' = v. Extension aux suites de fonctions de classe  $\mathcal{C}^k$ , sous l'hypothèse de convergence simple de  $(u_n^{(j)})$  pour  $0 \leq j \leq k-1$  et de convergence uniforme de  $(u_n^{(k)})$  sur tout segment de I.

### Révision de toute l'analyse réelle de sup

Notamment : dérivation, formules de Taylor, développement limité, Intégrale fonction de sa borne supérieure, primitivation etc. Privilégiez sur ces points des exercices calculatoires.

Deuxième semaine.

# Structures algébriques usuelles (1)

- a) Groupes et sous-groupes

Groupe. Produit fini de groupes. Exemples issus de l'algèbre et de la géométrie.

Sous-groupe. Caractérisation. Intersection de sous-groupes. Sous-groupe engendré par une partie. Sous-groupes du groupe  $(\mathbb{Z}, +)$ .

- b) Morphismes de groupes

Morphisme de groupes. Exemples : signature, déterminant.

Image et image réciproque d'un sous-groupe par un morphisme. Image et noyau d'un morphisme. Condition d'injectivité d'un morphisme. Exemple : groupe spécial orthogonal d'un espace euclidien.

Isomorphisme de groupes. Réciproque d'un isomorphisme.

- c) Groupes monogènes et cycliques

Groupe  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ . Générateurs de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .

Groupe monogène, groupe cyclique. Groupe des racines n-ièmes de l'unité.

Tout groupe monogène infini est isomorphe à  $(\mathbb{Z},+)$ . Tout groupe monogène fini de cardinal n est isomorphe à  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$ .

- d) Ordre d'un élément dans un groupe

Élément d'ordre fini d'un groupe, ordre d'un tel élément. Si x est d'ordre fini, l'ordre de x est le cardinal du sous-groupe de G engendré par x.

Si x est d'ordre fini d et si e désigne le neutre de G, alors, pour n dans  $\mathbb{Z}$ , on a  $x^n = e \iff d|n$ .

L'ordre d'un élément d'un groupe fini divise le cardinal du groupe. La démonstration n'est exigible que pour G commutatif.

Prévision: Structures algébriques (2): anneaux, arithmétique...